

# 非线性守恒方程的两种稳定化谱元方法

杨炜铨 许传炬

(厦门大学数学科学学院, 福建 厦门 361005)

**摘 要** 考虑非线性守恒方程的高阶数值解法, 介绍了基于谱元法的两种稳定性方法, 一种是谱粘性消去法(SVV), 另一种是过滤法. 在 SVV 方法中, 我们推广并分析了传统的基于单区域的 SVV 算子的定义. 在过滤法中, 我们分析了 SVV - Helmholtz 过滤算子的性质. 文中从分析和计算两方面对两种方法进行了比较, 建立了两者之间的关系. 最后通过一系列数值试验说明方法的有效性.

**关键词** 谱元法(SEM); 谱粘性消去法(SVV); 过滤法

**中图分类号** O 174.52

**文献标识码** A

## 1 引 言

谱方法是一种求解偏微分方程的高阶数值方法. 谱方法最显著的优势在于它的“无穷阶”收敛性, 即如果问题的解无限光滑, 那么谱方法求得的数值解将以  $1/N$  的任意次幂速度收敛于精确解, 这个优点是其它有限阶方法(如有限差分法和有限元法)所无法比拟的. 由于上述特点, 谱方法已经被广泛应用于椭圆、抛物型问题的求解中. 但传统的谱方法的局限在于无法灵活处理复杂的计算区域, 80 年代末发展的谱元法很好地弥补了这个不足. 谱元法在快速收敛的谱方法基础上结合了有限元法的区域剖分技术, 其基本思想是先将复杂区域剖分成若干个较小的区域, 然后在每个区域上应用谱方法. 谱元法的灵活特点及高效性在计算流体力学中得到了很好的体现([4]). 然而, 谱元法在处理守恒方程等双曲型方程时仍面临很大的困难: 首先, 与椭圆、抛物型不同的是, 双曲型问题本身不具备物理耗散性, 即使很小的误差都可能引起数值解的不稳定(e.g. [1]). 更为主要的是, 当解出现断点时, 谱元解会产生 Gibbs 现象, 导致无法得到收敛解. 而且, 即使解能够保持长时间的稳定, 计算结果也只要一阶精度, 这使得谱元法作为高阶方法的有效性受到质疑. 为了克服这些困难, 人们提出许多改进的方法, 其中包括谱粘性消去法和过滤法.

谱粘法消去法(SVV)是通过引入一个人工粘性参与数值计算来控制数值解的不稳定. 该方法在单区域情形下有比较完备的理论基础, 并得到了数值试验的验证. SVV 法有多种实现方式, 例如 S. M. Kaber[3] 提出的 LSVV 法和郭本喻等人[2] 提出的改进的 SV 法等等, 均能

较好地控制解的收敛性和稳定性. 但这些方法均建立在单区域上, 而在基于多区域剖分的谱粘性方法中如何选择谱粘性系数以及它们对数值解的影响等尚缺乏系统研究.

过滤法则是先进行无粘解计算, 后对数值解进行过滤. 但传统的过滤算子无法保持解在区域交界上的连续性, 这使其在向更复杂问题推广时面临困难. Xu and Pasquetti[6] 等人最近通过引进 SVV-Helmholtz 算子避免了这一困难.

本文旨在对比讨论两种方法在谱元中的实现方法, 通过解典型的双曲型守恒方程来揭示两者的区别与联系, 并通过数值试验验证方法的稳定性和收敛性. 本文的结构如下: 首先在第二节介绍求解守恒方程的特征线法; 其次回顾传统的谱粘性方法, 并将其推广到谱元情形中; 然后在第三节讨论过滤法在谱元中的实现, 建立过滤法与 SVV 法之间的联系; 最后, 在第四节对两种方法的计算结果进行对比分析.

## 2 SVV 法的谱元实现

### 2.1 特征线性

考虑适当边界条件下的守恒方程: 求  $u(x, t)$ , 使得

$$\begin{cases} \partial_t u(x, t) + \partial_x f(u(x, t)) = 0 \quad \forall x \in \Lambda, t > 0 \\ u|_{\Gamma_{in}} = 0 \\ u(x, 0) = u_0(x) \quad \forall x \in \Lambda \end{cases} \quad (1)$$

这里  $\Lambda = [-1, 1]$ , 流量  $f$  是  $u$  的正则函数,  $\Gamma_{in} = \{x \in \partial\Lambda; f_u(u(x, t)) > 0\}$ . 守恒方程的对流项有多种处理方式, 我们采用 Xu 等在[7] 中引进的特征线法进行预处理. 其出发点是: 把方程(1) 的  $\partial_x f(u(x, t))$  改写成  $\partial_x f(u(x, t)) = v(x, t) \partial_x u(x, t)$  形式, 其中  $v(x, t) = f_u$  称为速度场, 则可将方程(1) 改写成如下 Lagrangian 导数的形式:

$$\frac{Du}{Dt} = 0 \quad (2)$$

这里  $D/Dt$  是沿特征线方向的 Lagrangian 导数. 对(2) 式进行  $Q$  阶 Euler 向后差分格式的时间离散:

$$\frac{\alpha_0 u^{n+1} + \alpha_1 \tilde{u}^n + \dots + \alpha_Q \tilde{u}^{n+1-Q}}{t} = 0 \quad (3)$$

其中,  $\alpha_q, q = 0, \dots, Q$ , 为格式系数,  $u^{n+1}$  是  $u$  在  $t = t^{n+1}$  时刻的近似.  $\tilde{u}^{n+1-q}$  为  $u(\mathcal{X}(x, t^{n+1}, T); T)$  在  $T = t^{n+1-q}$  时刻的近似值.  $\mathcal{X}^n(x)$  定义为  $\mathcal{X}^n(x) = \mathcal{X}(x, t^{n+1}; t^n)$ . 给定  $x$  和  $t$ ,  $\mathcal{X}(x, t; T)$  是以下特征方程的解

$$\begin{cases} \frac{d\mathcal{X}}{dT} = v(\mathcal{X}, T), 0 < T < t \\ \mathcal{X}(x, t; t) = x. \end{cases} \quad (4)$$

由方程(4) 可知,  $T$  定义了  $t$  时刻到达  $x$  位置的粒子的特征线.  $\tilde{u}^{n+1-q}$  的具体计算步骤见文[7], 当  $\tilde{u}^{n+1-1}, q = 1, \dots, Q$ , 计算出来后由(3) 式可直接计算  $u^{n+1}$ ,

现在考虑方程(2) 谱元逼近. 对计算区域  $\Lambda$  剖分如下:

$$\Lambda = \bigcup_{k=1}^K \Lambda^k,$$

定义离散空间  $X_N$  如下:

$$X_N := P_{N,K}(\Lambda) := \{\varphi \in C^0(\Lambda); \varphi|_{\Lambda_k} = P_n(\Lambda^k), 1 \leq k \leq K\}$$

$$X_N^0 := \{\psi_N \in X_N, \psi_N|_{\Gamma_{in}} = 0\}$$

这里  $P_N(\Lambda^k)$  表示  $\Lambda^k$  中阶数不高于  $N$  的多项式所组成的空间. 考虑方程 (2) 的如下空间离散: 求  $u_N \in X_N^0$ ,  $u_N(\cdot, 0) = I_N u_0$ , 使得

$$(D_t u_N, \varphi) = 0, \forall \varphi \in X_N^0 \quad (5)$$

这里  $(\cdot, \cdot)$  表示标准的  $L^2$ -内积. 我们知道, 当精确解光滑时, 由问题 (5) 可以有效计算数值解. 但是, 守恒率问题的解通常会产生间断, 这时直接由问题 (5) 逼近将得不到收敛的解. 下面我们讨论两种解决该方法的方法.

## 2.2 谱粘性消去法

谱粘性消去法 (SVV) 与传统的粘性消去法类似, 即都是通过向方程中加入一项人工粘性项来使数值解稳定, 但 SVV 法不同之处在于, 加入的人工粘性项仅仅作用在高频上. 我们考虑在问题 (5) 中加入如下形式的稳定项  $\epsilon_N \partial_x (Q(\partial_x u_N))$ : 求  $u_N \in X_N \cap H^1_0(\Lambda)$ , 使得:

$$(D_t u_N, \varphi) + \epsilon_N (Q(\partial_x u_N), \partial_x \varphi) = 0, \forall \varphi \in X_N \cap H^1_0(\Lambda) \quad (6)$$

这里  $\epsilon_N > 0$  为粘性振幅,  $Q$  是谱粘性算子.

• 当  $K = 1$  时, 一般取  $\epsilon_N = O(1/N)$ , 而  $Q$  具有如下定义:

$$Q\varphi = \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i \hat{\varphi}_{L_i}, \quad \forall \varphi \in \sum_{i=0}^N \hat{\varphi}_{L_i}$$

这里,  $L_i$  是阶 Legendre 多项式,  $\hat{Q}_i$  为  $Q$  的谱系数, 满足:

$$\begin{cases} \hat{Q}_i = 0, 0 \leq i \leq m_N \\ 0 \leq \hat{Q}_i \leq 1, m_N \leq i \leq N. \end{cases}$$

由上式可知, 谱粘性算子  $Q$  仅仅作用于高频部分 ( $i \geq m_N$ ). 参数  $m_N$  决定了  $Q$  的作用范围. 在实际计算中, 一般取  $m_N = \sqrt{N}$  或者  $m_N = N/2$ . 当  $m_N \leq i \leq N$  时, 数值试验表明,  $\hat{Q}_i$  越光滑效果越好, 因此通常取  $\hat{Q}_i = e^{-((i-N)/(i-m_N))^2}$ ,  $m_N \leq i \leq N$ .

Tadmor 等人 [5] 指出, 当  $\epsilon_N$  选择适当时, 方程 (6) 的解将逼近方程 (2) 的解. [5] 中还对参数  $m_N$  进行了分析, 证明了在  $L^2$  空间中, 对任意  $T > 0$ ,  $u_N(\cdot, T)$  都强收敛于  $u(\cdot, T)$ .

为讨论方便, 记

$$V_N(u_N, \varphi) = \epsilon_N (Q(\partial_x u_N), \partial_x \varphi) L^2(\Lambda), \quad (7)$$

这里我们用  $X$  代替了  $x$ , 表示当前计算区域是  $\Lambda$ . 注意到  $V_N$  可以写成以下对称形式:

$$V_N = \epsilon_N (Q^{1/2} \partial_x u_N, Q^{1/2} \partial_x \varphi) L^2(\Lambda)$$

其中:  $Q^{1/2}$  定义如下  $Q^{1/2}\varphi = \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i \hat{\varphi}_{L_i}, \quad \forall \varphi \in \sum_{i=0}^N \hat{\varphi}_{L_i}$ .

实际上, 我们有

$$\begin{aligned} V_N &= \epsilon_N \int_{-1}^1 Q(\partial_x u_N) \partial_x \varphi dX \\ &= \epsilon_N \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i (\partial_x u_N)_i L_i(X) \right] \left( \sum_{i=0}^N (\partial_x \varphi)_i L_i(X) \right) dX \\ &= \epsilon_N \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i (\partial_x u_N)_i (\partial_x \varphi)_i L_i^2(0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \epsilon_N \int_{-1}^1 \left[ \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i(\partial_X u_N) \cdot L_i(X) \right]_{i=0}^N \hat{Q}_i(\partial_X \mathcal{Q}) \cdot L_i(X) dX \\
&= \epsilon_N (Q^{1/2} \partial_X u_N, Q^{1/2} \partial_X \mathcal{Q})_{L^2(\Lambda)}.
\end{aligned}$$

• 推广到  $K > 1$  的情形

为了把 SVV 项推广到  $K > 1$  时的谱元计算中, 需要对  $V_N$  进行重新定义, 这里涉及几个关键问题: 参数  $\epsilon_N$  和  $m_N$  的选择以及区域交界条件的处理.

首先, 必须讨论区域映射  $x = f(X): \Lambda \rightarrow \Lambda^k$  情况下粘性算子  $Q$  的合理定义. 对一般的映射  $f$ , 尽管  $u_N \in P_N(\Lambda)$ , 但  $\partial_X u_N \notin P_N(\Lambda)$ . 设  $g = f^{-1}$ , 则  $X = g(x)$ ,  $\partial_X g \partial_x f = 1$ . 不失一般性, 假设  $\partial_X g > 0$ . 记  $\mathcal{Q} = \mathcal{Q} \circ f$ , 那么  $\partial_X u_N = \partial_X g(x) \partial_x \tilde{u}_N(X)$ .

— 在特殊情形, 即当  $g$  是一个线性映射时, 则有

$$Q(\partial_X u_N)(x) = \partial_X g \sum_{i=0}^N \hat{Q}_i(\partial_X \tilde{u}_N) L_i(X).$$

因此, 在每个区块  $\Lambda^k$  中  $V_N$  可以表示成:

$$V_N^k = \epsilon_N^k (\partial_X g^Q(\partial_X \tilde{u}_N), \partial_X f \partial_X g^{\partial} \mathcal{Q})_{L^2(\Lambda)} = \epsilon_N^k \partial_X g (Q(\partial_X \tilde{u}_N), \partial_X \mathcal{Q})_{L^2(\Lambda)}.$$

上式同样可以写成如下对称形式:

$$V_N^k = \epsilon_N^k \partial_X g (Q^{1/2}(\partial_X \tilde{u}_N), Q^{1/2} \partial_X \mathcal{Q})_{L^2(\Lambda)} = \epsilon_N^k (\partial_X g Q^{1/2}(\partial_X \tilde{u}_N), Q^{1/2}(\partial_X \mathcal{Q}))_{L^2(\Lambda)}. \quad (8)$$

在区块计算上还要相应修改  $\epsilon_N^k$  的值, 自然的选择是  $\epsilon_N^k = O(\frac{L^k}{2N})$ ,  $L^k$  为区间  $\Lambda^k$  的长度.

— 当  $g$  是非线性映射时, 根据(7) 的定义并不能导出(8), 但为了得到稳定项  $V_N$  的耗散性(及椭圆性), 我们直接采用(8) 式的近似形式定义  $V_N^k$ .

其次, 考虑区域部分情形, 此时谱粘性项的合理定义为

$$V_N = \sum_{k=1}^K V_N^k = \sum_{k=1}^K \epsilon_N^k (\partial_X g Q^{1/2}(\partial_X \tilde{u}_N), Q^{1/2}(\partial_X \mathcal{Q}))_{L^2(\Lambda)}. \quad (9)$$

## 3 过滤法

### 3.1 过滤算子

过滤法的基本思想是对每步计算得到的解进行过滤处理, 而过滤算子的选择起关键作用. 传统的谱过滤算子[8] 虽然可以有效抑制 Gibbs 现象, 但在区域剖分情形下, 谱过滤算子无法保证交面连续性. Xu 在[6] 中引入一种过滤算子来解决谱元法在高雷诺数下不可压流计算的稳定性问题. 该算子解决了谱元区域交界的连续性问题. 其做法是将每步得到的数值解通过一个谱消失的 Helmholtz 算子进行过滤. 在[6] 中的数值试验结果表示, 该过滤算子可以有效地提高数值模拟的稳定性. 这里我们尝试将该方法引入到非线性守恒方程中来检验其有效性.

假定  $u_N^{n+1}$  是由谱元问题(3) 再利用特征线得到的近似解, 我们用以下方法对  $u_N^{n+1}$  进行过滤: 求  $\bar{u}_N^{n+1}$ , 使得  $\bar{u}_N^{n+1} - u_N^{n+1} \in X_N \cap H_0^1(\Lambda)$  及

$$(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) + \frac{t}{\alpha_0} V_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = (u_N^{n+1}, \mathcal{Q}), \forall \mathcal{Q} \in X_N \cap H_0^1(\Lambda) \quad (10)$$

其中算子  $V_N$  由(9) 定义. 显然, 该过滤过程保留了内元上  $u_N^{n+1}$  的连续性和边界上的边条件.

$$\bar{u}_N^{n+1} \Big|_{\partial\Lambda} = u_N^{n+1} \Big|_{\partial\Lambda}, \forall n = 0, 1, \dots$$

引入记号  $F_H$  表示上述过滤过程:

$$\bar{u}_N^{n+1} = F_H u_N^{n+1}, \quad (11)$$

那么  $F_H$  可以看作一个谱消失的 Helmholtz 算子. 由于谱粘性项  $V_N$  仅仅作用于最高频波上, 因此该过滤的实际结果在于对  $u_N^{n+1}$  的高频部分进行了压缩.

### 3.2 SVV 法和过滤法之间的联系

现在证明 SVV 法 (6) 的时间离散格式等价于相应的过滤过程 (10).

设  $\{u_N^n\}_{n \geq 1}$  是由 SVV 问题 (6) 通过  $Q$  阶  $BD$  时间离散得到的解, 那么  $u_N^n$  满足:

$$\left( \frac{\alpha_0 u_N^{n+1} + \alpha_1 u_N^n + \dots + \alpha_Q u_N^{n+1-Q}}{t}, \mathcal{Q} \right) + V_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = 0, \forall \mathcal{Q} \in X_N \cap H_0^1(\Lambda). \quad (12)$$

现在令  $\{\bar{u}_N^n\}_{n \geq 1}$  为相应的非稳定化谱元问题 (5) 的解, 则  $\bar{u}_N^n$  满足:

$$\left( \frac{\alpha_0 \bar{u}_N^{n+1} + \alpha_1 \bar{u}_N^n + \dots + \alpha_Q \bar{u}_N^{n+1-Q}}{t}, \mathcal{Q} \right) = 0, \forall \mathcal{Q} \in X_N^0. \quad (13)$$

假定用 (12) 对  $u_N^n$  在每个时间步结束时都进行过滤, 且记  $\bar{u}_N^n = F_H u_N^n$ , 那么  $u_N^{n+1}$  实际上是以下问题的解:

$$\left( \frac{\alpha_0 u_N^{n+1} + \alpha_1 \bar{u}_N^n + \dots + \alpha_Q \bar{u}_N^{n+1-Q}}{t}, \mathcal{Q} \right) = 0 \quad (14)$$

利用 (11), 则上式可以改写为:

$$\frac{\alpha_0}{t} [(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) + \frac{t}{\alpha_0} V_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q})] + \left( \frac{\alpha_1 \bar{u}_N^n + \dots + \alpha_Q \bar{u}_N^{n+1-Q}}{t}, \mathcal{Q} \right) = 0$$

由此得到

$$\left( \frac{\alpha_0 \bar{u}_N^{n+1} + \alpha_1 \bar{u}_N^n + \dots + \alpha_Q \bar{u}_N^{n+1-Q}}{t}, \mathcal{Q} \right) + V_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = 0, \quad (15)$$

而这正是  $\bar{u}_N^n$  满足的方程. 这就证明了  $\{\bar{u}_N^n\}_{n \geq 1}$  与  $\{u_N^n\}_{n \geq 1}$  满足同样的方程, 也就是说 SVV 法 (6) 和过滤法对于守恒律问题的计算结果是相同的.

### 3.3 过滤的实现

考虑用高斯求积公式来逼近问题 (10): 给定  $u_N^{n+1}$ , 求  $\bar{u}_N^{n+1}$ , 使得  $\bar{u}_N^{n+1} - u_N^{n+1} \in X_N \cap H_0^1(\Lambda)$ , 且满足

$$(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q})_N + \frac{t}{\alpha_0} \mathcal{N}_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = (u_N^{n+1}, v_N)_N, \forall \mathcal{Q} \in X_N \cap H_0^1(\Lambda) \quad (16)$$

其中  $(\cdot, \cdot)_N$  是对应高斯求积公式的离散内积.

$$\mathcal{N}_N(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = \sum_{k=0}^K \mathcal{N}_N^k(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}),$$

这里  $\mathcal{N}_N^k(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q})$  中 (8) 是  $V_N^k(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q})$  采用 Gauss - Lobatto 求积公式后的逼近, 即

$$\mathcal{N}_N^k(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q}) = \mathcal{E}^k(\partial_x g Q^{1/2}(\partial_x \bar{u}_N^{n+1}), Q^{1/2}(\partial_x \mathcal{Q}))_N. \quad (17)$$

取基于全局节点的 Lagrangian 插值多项式作为  $X_N \cap H_0^1(\Lambda)$  的基函数, 将  $\bar{u}_N^{n+1}$  表示成这些基函数的线性组合, 并让  $\mathcal{Q}$  取遍所有基函数, 那么可以得到在谱元区块  $\Lambda^k$  上  $\mathcal{N}_N^k(\bar{u}_N^{n+1}, \mathcal{Q})$  的矩阵形式:

$$\sum_{i=0}^N \rho_i g_i^k(QD)_{im} \left( \sum_{p=0}^N (QD)_{ip} \bar{u}_p \right), \forall m = 1, \dots, N-1$$

其中,  $D$  是标准的 Legendre 导数矩阵,  $\rho_i$  为对应于 Gauss - Lobatto 求积公式的权系数,  $\bar{u}_p$  表示  $\bar{u}^{n+1}$  在第  $p$  个 Gauss - Lobatto 节点上的值.  $Q$  具有以下形式:

$$Q = M^{-1} \text{Diag}(\hat{Q}_i)^{1/2} M$$

这里  $M$  表示从物理空间到谱空间的转换矩阵. 因此, 在实际计算中我们只需把求解标准 Helmholtz 问题的导数矩阵  $D$  替换为  $QD$  即可. 这样处理使得求解 (16) 的费用与求解 Helmholtz 的费用相当. 从前面对 SVV 法的分析我们知道过滤算子  $Q$  仅仅作用于高频部分, 并且由于实际上 “人工粘性系数”  $\frac{\tau}{\alpha_0} \epsilon_N$  一般来说相当小, 因此问题 (16) 是一个具有很好条件数的对称问题, 可以采用共轭梯度法求解.

## 4 数值结果

为了考察 SVV 法和过滤法求解守恒律问题的有效性和稳定性, 我们选择线性对流方程和 Burgers 方程进行测试.

表 1 线性对流方程三种方法的  $L^2$  误差比较,  $\epsilon_N^k = 1/N, m_N = \overline{N}$

t	NOSVV	SVV	FILTER
1.0	0.2175756E - 07	0.4114321E - 04	0.4114321E - 04
1.5	0.2653050E - 07	0.4892668E - 04	0.4892668E - 04
2.0	0.3057237E - 07	0.5618273E - 04	0.5618273E - 04

表 2 线性对流方程三种方法的  $L^2$  - 误差比较,  $\epsilon_N^k = 1/KN, m_N = N - 2$

t	NOSVV	SVV	FILTER
1.0	0.2175756E - 07	0.1464770E - 07	0.1464770E - 07
1.5	0.2653050E - 07	0.1748768E - 07	0.1748767E - 07
2.0	0.3057237E - 07	0.1992319E - 07	0.1992318E - 07

### 4.1 线性对流方程

考虑线性对流方程, 即在问题 (1) 取  $f(u) = u$ , 这时在特征线法中速度场  $v(x, t) = 1$ . 考虑初值  $u(x, 0) = \sin^4(\pi x)$  和周边界条件. 该问题有精确解:  $u(x, t) = u(x - t, 0) = \sin^4(\pi(x - t))$ . 由于是线性问题, 且问题的解无穷光滑, 因此不需要稳定项, 通常的谱元法就可以得到很好的稳定解. 我们进行该测试的目的是研究稳定性方法对精度的影响. 计算中我们把计算区域  $\Lambda = [-1, 1]$  剖分为 10 个区块 ( $K = 10$ ).

首先比较不同方法的精度, 每个区块上用 9 阶多项式逼近 (即  $N = 9$ ). 取时间长度为  $t = 10^{-3}$ , 谱粘性参数为  $\epsilon_N^k = 1/N, m_N = \overline{N}$ . 表 1 给出标准无稳定化谱元法 (NOSVV) 和谱粘性谱元法 (SVV) 以及过滤法 (FILTER) 计算得到的解在  $t = 1, t = 1.5, t = 2.0$  三个时刻的  $L^2$  - 误差.

从结果看出, 三种方法得到的误差都比较小, 这说明对于线性对流方程来说, 不必加入粘

性项就已经得到比较精确的数值解, 粘性项对数值解结果有一定的副影响, 但这个影响不是很大, 而且可以预见, 如果减小谱粘性系数  $\epsilon_N$  或增加截断频率  $m_N$ , 那么谱粘性项对精度的副影响将会减小. 表 2 显示的是取参数  $\epsilon_N = 1/KN$ ,  $m_N = N - 2$  时的计算结果比较. 意外的是, 在这个谱粘性参数值下, 稳定化方法不但具有稳定效果, 而且改善了解的精度.

同时从表 1-2 可以看出, SVV 法和 FILTER 法两者之间的计算结果差别很小, 考虑计算中的舍入误差的话, 可以认为两种方法的计算结果是一致的. 这验证了第三节的分析结果.

其次, 考察稳定性方法的收敛速度, 即精度关于多项式阶数的变化情况, 希望得到与标准谱元法一样的谱收敛. 图 1 显示两种稳定性方法计算所得解的  $L^2$  误差随  $N$  变化情况. 从图中可见, 随着阶数  $N$  的增大,  $L^2$  误差呈指数衰减, 即数值解具有所谓的谱收敛.

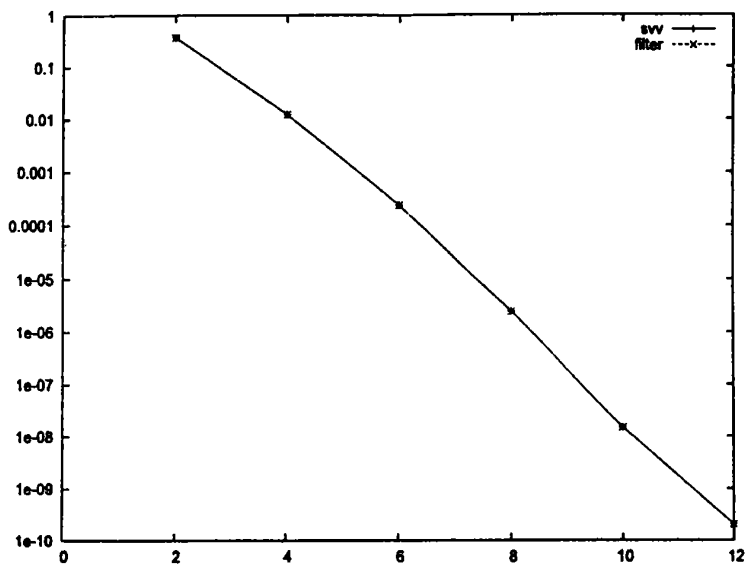


图 1  $t = 1$  时两种稳定化方法所得解的  $L^2$  - 误差随  $N$  变化情况.

## 4.2 Burgers 方程

考虑 Burgers 方程的谱元法数值解, 即在问题(1) 中取  $f(u) = \frac{1}{2}u^2$ . 这时  $f_u(x, t) = u(x, t)$ . 取初值  $u(x, 0) = -\sin(\pi x)$ , 边界条件  $u(\pm 1, t) = 0$ . 因为要得到 Burgers 方程的精确解比较困难, 而我们的目的主要是为了对比两种稳定性方法的有效性, 不要求精度太高的精确解, 所以我们取一个用高分辨率网络 ( $N = 20, K = 20$ ) 计算得到的数值解作为精确解.

我们知道, 在上述初始条件和边界条件下, Burgers 方程的解在  $t_d = 1/\pi$  时刻在  $x_d = 0$  点处间断, 而在这时刻之后, 解由熵条件定义. 已经证明, 传统的谱元法无法得到收敛的间断解. 因此我们选择间断时  $t_d$  和间断后  $2t_d$  两个时间点的数值结果进行比较. 计算参数取:  $N = 8, K = 10, t = 10^{-3}, \epsilon_N = 1/KN, m_N = \overline{N}$ . 图 2 显示  $t = t_d$  时刻由标准 SEM, SVV-SEM 和 FILTER-SEM 三种方法计算得到的解与精确解的比较.

为了更清楚地发现它们的差异, 我们将误差分布显示在图 3 中. 可以看出, 在断点时刻,

由标准 SEM 计算的解已经开始发散, 而 SVV 法和 FILTER 法明显地具有抑制振荡的作用. 如果继续计算下去, 那么稳定性方法的作用将更加明显. 图 4 表示  $t = 2t_d$  时刻三种方法所得解与精确解的比较, 可以明显看出, 这时用传统的无稳定化谱元法求得的解与精确解的相差很大, 振荡更加严重, 而应用 SVV 法和 FILTER 法较好地控制了解的发散.

总之, 从上述数值试验看出, 我们构造的 SVV 稳定性法和过滤法都是求解非线性守恒方程的有效方法, 它们能较好地控制解在间断处的振荡, 得到稳定的收敛解.

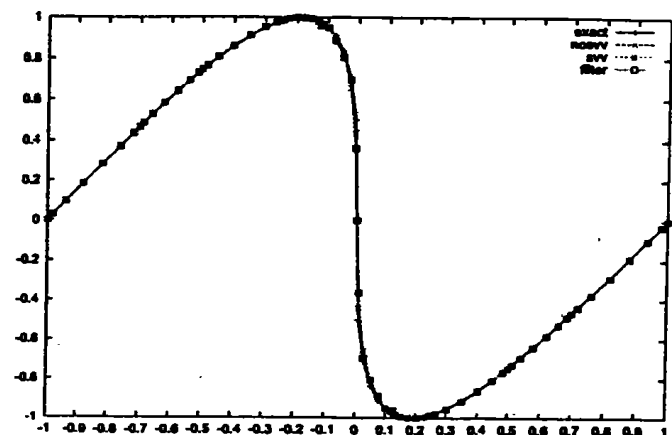


图 2  $t_d$  时刻精确解和 NOSVV, SVV, FILTER 三种方法求得的数值解比较.

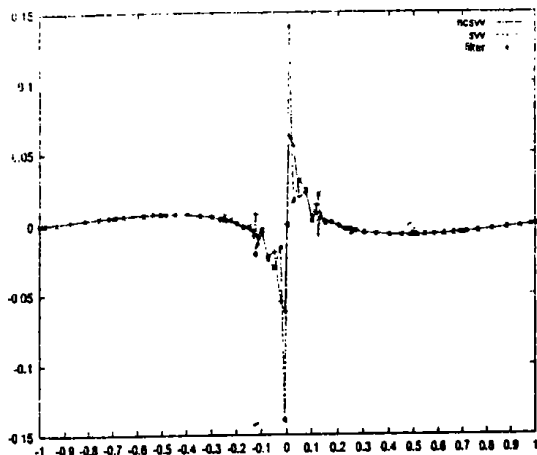


图 3  $t_d$  时刻 NOSVV, SVV, FILTER 种方法所得解的误差比较.

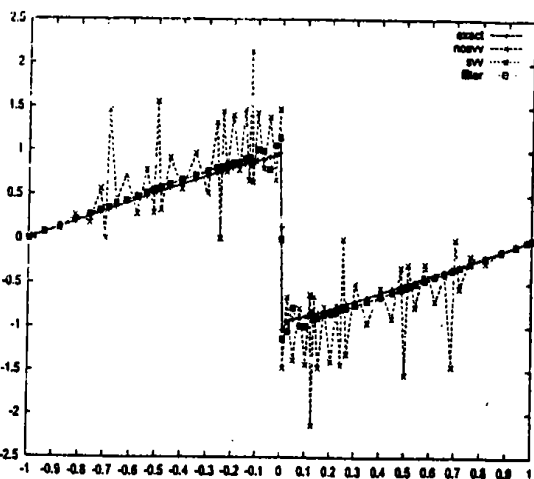


图 4  $2t_d$  时刻精确解和 NOSVV, SVV, FILTER 三种方法求得的数值解比较.

## 参 考 文 献

- [1] Gottlieb D, Hesthaven J S. Spectral methods for hyperbolic problems. J. Comput. Appl. Math., 2001, 128: 83–131.
- [2] Guo B Y, Ma H P, Tadmor E. Spectral vanishing viscosity method for nonlinear conservation laws. SIAM J. Numer. Anal., 2001, 39(4): 1254–1268.



- [3] Ould Kaber S M. A Legendre pseudospectral viscosity method. J. Comput. Phys., 1996, 128: 165– 180.
- [4] Maday Y, Patera A.T. Spectral Element Methods for the Incompressible Navier–Stokes Equations, 3, ASME, ed. A.K. Noor and J.T. Oden., State-of-Art Surveys on Computational Mechanics, 1989.
- [5] Tadmor E. Convergence of spectral methods for nonlinear conservation laws. SIAM J. Numer. Anal., 1989, 26: 30– 44.
- [6] Xu C J. A filter-based stabilization method of spectral element computations of high Reynolds number incompressible flows. to appear in J. Sci. Comput., 2005.
- [7] Xu C J, Pasquetti R. On the efficiency of semi-implicit and semi-Lagrangian spectral methods for the calculation of incompressible flows, Inter. J. Numer. Meth. Fluids, 2001, 35: 319– 340.
- [8] Vandeven H. Family of spectral filters for discontinuous problems. SIAM J. Sci. Comput. 6, 1991, 159 – 192.

## Two Stabilized Spectral Element Methods for Nonlinear Conservation Laws

*Yang Weicheng      Xu Chuanju*

(Department of Mathematics, Xiamen University, Xiamen Fujian 361005)

**Abstract** This paper is aimed to develop efficient stabilization methods for the calculation of conservation laws by the spectral element method. We introduce two types of stabilization technique: spectral viscosity vanishing (SVV) and filtering. For the SVV, we generalize the classical definition of the SVV operator to the case of multi-domain. For the filtering technique, we introduce a SVV-Helmholtz operator, and discuss its relationship with the classical spectral filters and SVV-stabilization. Implementation technique of both methods are also given. Finally we present some numerical tests to confirm the efficiency of the proposed methods.

**Key Words** SEM; SVV; Filter